Matice – algebraické vlastnosti

Def.: A, B … matice typu $r \times s$ (stejného typu) nad polem P. Jejich součet $A+B$ je matice typu $r \times s$ (nad P) taková, že

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Pozn.: $(A+B)_{ij}$ je prvek matice $A+B$ na i-tém řádku a j-tém sloupci

c-násobek A: $(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$

Př

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

nulová matice – lib. typu, samé nuly (značíme 0)
jednotková matice – jen čtvercová ($r=s$)
na diagonále 1, jinde 0
(značíme E)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení A, B, C … matice $r \times s$ nad P

1) $A + B = B + A$ (komutativita)
2) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (asociativita)
3) $A + 0 = A$
4) $A + (-A) = 0$
5) $E \cdot A = A$ (pro čtvercové matice)
6) $c \cdot (A+B) = cA + cB$
7) $(c+k)A = cA + kA$
8) $c(kA) = (ck)A$

Důkaz: cvičení

Definice: A … matice typu $r \times s$ nad polem P
B … matice typu $s \times t$ nad polem P
Jejich součin $A \cdot B$ je matice typu $r \times t$ nad polem P taková, že

$$(A \cdot B)_{kl} = A_{k1} B_{1l} + A_{k2} B_{2l} + \dots + A_{ks} B_{sl} = \sum_{i=1}^{s} A_{ki} B_{il}.$$

Př

$$A = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \quad B = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{2\times 3}{A \cdot B} \quad (B \cdot A \not\exists)$$

$$AB_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$$
$(k=1, l=1)$ $(i=1)$ $(i=2)$

$$A \cdot B_{23} = A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 27$$
$(k=2, l=3)$ $(i=1)$ $(i=2)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 27 \end{pmatrix}$$

Násobení matic není komutativní! $A \cdot B \neq B \cdot A$

Tvrzení:
1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2) $A \cdot E = E \cdot A = A$
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

když A, B, C jsou takové, že operace jsou definovány

Důkaz: Technické cvičení

Inverzní matice

Př $(\mathbb{R}, +)$ neutr. prvek $= 0$

$a + (-a) = 0$ $\quad -a$ je inverzní k a

$(\mathbb{R}, \cdot)$ neutr. prvek $= 1$

$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ $\quad \frac{1}{a}$ je inverzní k a $(\neq 0)$

$(M_{3\times 3}, +)$ neutr. prvek $= \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

inverzní k $A = -A$

$(M_{3\times 3}, \cdot)$ neutr. prvek $= E$ $\quad \left(E = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right)$

inverzní k $A = A^{-1}$

Postup hledání inv. matice:

$(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1})$ $\quad$ (nemusí $\exists$)

(k nulové matici $\nexists$ inverze)

Def: A .. typu $r \times r$. Matice A^{-1} je <u>inverzní matice</u> k A $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Matice je <u>invertibilní</u>, když k ní $\exists$ matice inverzní.

Tvrzení: A, B ... invertibilní

Potom 1) $A \cdot B$ je také invertibilní a platí

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad (\neq A^{-1} \cdot B^{-1})$

2) A^{-1} je také invertibilní a platí

$(A^{-1})^{-1} = A$

Důkaz: v kapitole Alg. struktury (monoidy)

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = E$

$A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} \cdot A^{-1} = E$

$\underbrace{A \cdot E \cdot A^{-1}}_{=E} = E$

Lemma: A, B .. matice stejného typu. TFAE

1) B vznikne z A jednou z elem. řádk. úprav

2) $\exists$ matice Q taková, že $B = Q \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{js} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{js} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \qquad Q \cdot A = B$$

Tvrzení: Čtvercová matice je invertibilní $\Leftrightarrow$ je řádkově ekvivalentní jednotkové matici.

Důkaz: „$\Rightarrow$" A je invertibilní tzn. $\exists A^{-1}: A \cdot A^{-1} = E$

A můžeme upravit na B v G-J tvaru

2 případy: 1) $B = E$

2) B má nějaký nulový řádek

$\exists Q: \ B = Q \cdot A$ $\qquad B = Q \cdot A \ / \cdot Q^{-1}$ zleva

$A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad \underbrace{Q^{-1} \cdot B}_{\text{má nulový řádek}} = A$

to je ve sporu s tím, že $A^{-1} \ \exists$

„$\Leftarrow$" A je řádkově ekv. jednotkové matici

$\exists Q: \ E = Q \cdot A$

$Q \cdot A = E \ / \cdot Q^{-1}$ zleva

$A = Q^{-1} \cdot E$

$A = Q^{-1} \Rightarrow A$ je invertibilní

Transpozice matic – přehození řádků a sloupců $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

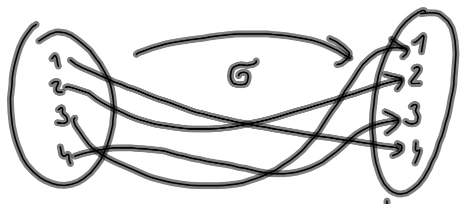
Cv ověřte na vhodných maticích

1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Permutace

Def: Permutace je bijekce na konečné množině.



$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

S_n = množina všech permutací na n-prvkové množině.

Počet všech permutací na S_n je $n!$

Př S_3

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

$6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Inverze permutace – přehození sousedních prvků

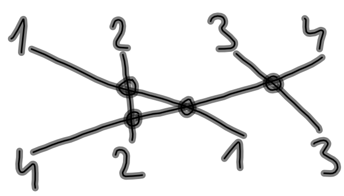
$i < j \ \wedge \ \sigma_i > \sigma_j$

$\text{inv}(\sigma)$ = min. počet inverzí σ

Př $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1 2 3 4
1 2 4 3
1 4 2 3
4 1 2 3
4 2 1 3

$\text{inv}(\sigma) = 4$



$\text{Sgn}(\sigma)$ – <u>znaménko permutace</u>

$\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$

Př $\text{inv}(\sigma) = 4$

$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$

- Složení permutací je permutace
- ke každé permutaci $\exists$ permutace inverzní (příklady na cvičení)